به نام خدا

Expansion of the fermionic creation operators in many-body localized (MBL) systems

Zahra Gholami[1], Morteza Soltani[1], Mohsen Amini[1], and Ebrahim Ghanbari-Adivi[1]

[1] *Faculty of Physics, University of Isfahan (UI), Isfahan 81746-73441, Iran*

فرضیه گرمایی بودن ویژه حالت ها (ETH) :

در مکانیک آماری فرضیه Ergodicity بیان می کند که اگر حالت اولیه سیستم در فضای فاز مشخص باشد بعد از گذشت زمان کافی سیستم همه فضای فاز در دسترس خود را می پیماید.

همین مسأله را می توان برای مکانیک کوانتومی نیز تعمیم داد به این صورت که گفته می شود تمام حالتهای کوانتومی بس ذره ای در صورتی از فرضیه Ergodicity پیروی می کنند که هر ویژه حالت هامیلتونی گرمایی باشد.

خصوصیات گرمایی بودن ویژه حالتها:

۱. ویژه حالتها یکنواخت (همگن یا هم احتمال) هستند.
۲. آنتروپی ویژه حالتها از قانون حجمی پیروی می کند.
۳. اگر یک زیر سیستم در نظر بگیریم، این زیر سیستم دارای دمای یکنواخت T خواهد بود.
۴. ویژه حالتها نباید دارای حافظه جایگزیده باشند.

• مدل اندرسون :

در سال ۱۹۵۸ یک مدل تصادفی بدون برهمکنش (تک ذره ای) توسط فلیپ اندرسون ارائه شد که به کمک آن سرکوب پدیده پخش در یک سامانه کوانتومی بی نظم توضیح داده می شود. در این مدل، بی نظمی در بازه $[-w,w]$ انتخاب می شود و سامانه گذار فازی ناشی از جایگزیدگی ویژه حالت ها را تجربه می کند که این گذار فاز در اصطلاح گذار اندرسون نامیده می شود. نشان داده می شود که برای سامانه های یک بعدی گذار فازی از این نوع رخ نمی دهد و به ازای کمترین مقدار بی نظمی تمام ویژه حالت های سامانه جایگزیده خواهند بود.

• مدل MBL :

با مطالعه عددی یک سامانه برهم کنش دار مشخص شد که در حضور برهم کنش حتی برای سامانه های یک بعدی گذار فازی مشابه گذار اندرسون رخ می دهد با این تفاوت که در حضور برهمکنش، ویژه حالت ها جایگزیده بس ذره ای هستند.

سامانه های MBL بوسیله یک سری انتگرال های حرکت جایگزیده توصیف می شوند که به اختصار LIOM نامیده می شوند و ثابت های حرکت هستند.

• معرفی بسط عملگرهای خلق فرمیونی در سامانه های MBL :

برای اولین بار در سال ۲۰۰۶ مدل MBL معرفی شد و بسطی برای عملگرهای خلق فرمیونی به صورت زیر پیشنهاد گردید:

$$\tilde{\tau}_i^+ = \sum_j \alpha_j^i \tilde{\sigma}_j^+ + \sum_{j_1,j_2,j_3} \alpha_{j_1,j_2,j_3}^i \tilde{\sigma}_{j_1}^+ \tilde{\sigma}_{j_2}^+ \tilde{\sigma}_{j_3}^- + \sum_{j_1,j_2,j_3,j_4,j_5} \alpha_{j_1,j_2,j_3,j_4,j_5}^i \tilde{\sigma}_{j_1}^+ \tilde{\sigma}_{j_2}^+ \tilde{\sigma}_{j_3}^+ \tilde{\sigma}_{j_4}^- \tilde{\sigma}_{j_5}^- + \cdots$$

که در آن سعی می شود به روش اختلالی به مطالعه سامانه برهمکنشی پرداخته شود و گذار فاز جایگزیدگی در سامانه های فرمیونی توضیح داده شود.

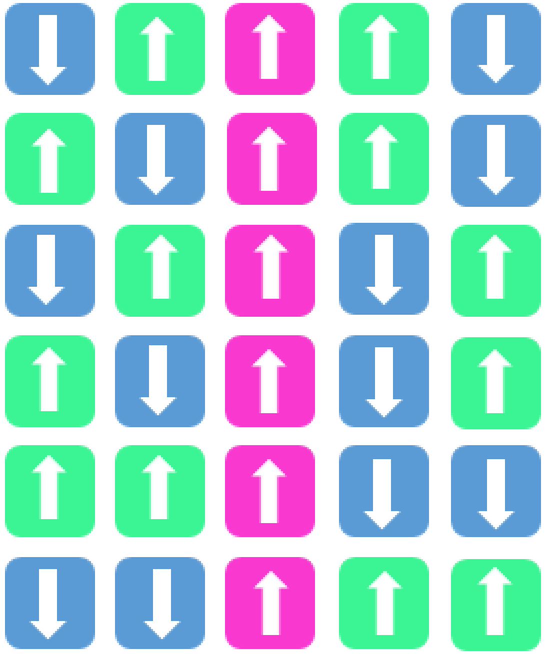
ما با الهام از این بسط می کوشیم:

۱. مسأله را برای سامانه های اسپینی بررسی کنیم.

۲. به روش قطری سازی دقیق ضرایب بسط نوشته شده را به دست آوریم.

D. M. Basko, I. L. Aleiner, and B. L. Altshuler, “Metal–insulator transition in a weakly interacting many-electron system with localized single-particle states,” *Annals of physics*, vol. **321**, no. 5, pp. 1126–1205, 2006.

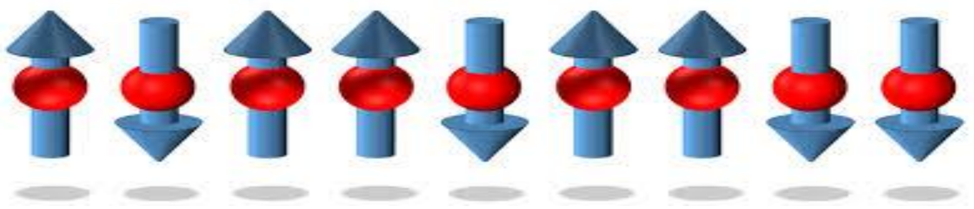
ایده اصلی ما از این فرض شهودی نشأت می گیرد که اگر سامانه جایگزیده باشد پس از محاسبه بسـط تـا مرتبـه مشـخص انتظار داریم اطلاعات جدیدی در مسأله ظاهر نشود.



- روش حل:

برای شروع هامیلتونی مدل XXZ بی نظم برهمکنشی یک بعدی زیر را برای یک زنجیره اسپینی در نظر می گیریم:

$$\hat{H} = \sum_i t(\sigma_i^+ \sigma_{i+1}^- + H.c.) + \sum_i \Delta \sigma_i^z \sigma_{i+1}^z + \sum_i h_i \sigma_i^z$$



این هامیلتونی با تبدیل جردن–ویگنر به شکل زیر قابل تبدیل به یک هامیلتونی فرمیونی برهمکنشی بدون اسپین است.

$$\tilde{\sigma}_i^+ = \left(\prod_{j<i} \sigma_j^z\right) \sigma_i^+$$

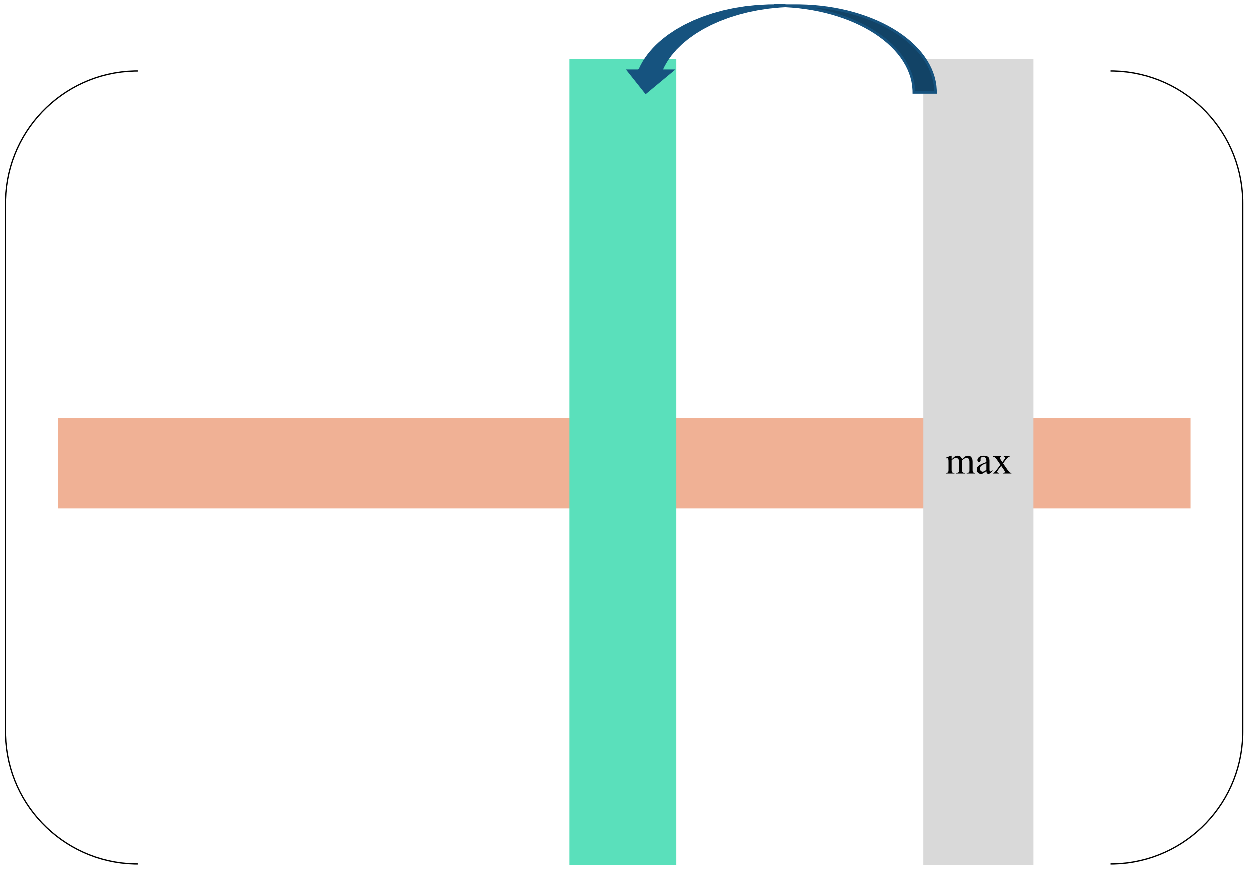
این عملگرها از جبر فرمیونی پیروی می کنند:

$$\{\tilde{\sigma}_i^+, \tilde{\sigma}_j^+\} = 0 \qquad \text{and} \qquad \{\tilde{\sigma}_i^+, \tilde{\sigma}_j^-\} = \delta_{ij}$$

بنابراین:

$$(\tilde{\tau}_i^+)_{ex} = U \tilde{\sigma}_i^+ U^\dagger$$

توجه به این نکته ضروری است که U همان تبدیل یکانی است که هامیلتونی را قطری می کند با این شرط که لازم است جایگشتی در ستون های آن رخ دهد تا بیشترین جایگزیدگی برای LIOM ها حاصل شود. به این منظور ما از روش ماکزیمم گیری سطری استفاده می کنیم.



اکنون با نگاهی دوباره به رابطه نوشته شده برای عملگرهای خلق فرمیونی خواهیم داشت:

$$\tilde{\tau}_i^+ = \sum_j \alpha_j^i \tilde{\sigma}_j^+ + \sum_{\substack{j_1,j_2,j_3 \\ j_2 > j_1}} \alpha_{j_1,j_2,j_3}^i \tilde{\sigma}_{j_1}^+ \tilde{\sigma}_{j_2}^+ \tilde{\sigma}_{j_3}^- + \sum_{\substack{j_1,j_2,j_3,j_4,j_5 \\ j_3 > j_2 > j_1 \\ j_5 > j_4}} \alpha_{j_1,j_2,j_3,j_4,j_5}^i \tilde{\sigma}_{j_1}^+ \tilde{\sigma}_{j_2}^+ \tilde{\sigma}_{j_3}^+ \tilde{\sigma}_{j_4}^- \tilde{\sigma}_{j_5}^- + \cdots$$

به عبارت دیگر:

$$\tilde{\tau}_i^+ = \tilde{\tau}_i^{+(1)} + \tilde{\tau}_i^{+(2)} + \tilde{\tau}_i^{+(3)} + \cdots$$

بنابراین برای محاسبه ضرایب بسط نوشته شده $(\tilde{\tau}_i^+)_{ex}$ را در نظرمی گیریم و با توجه به آن ضرایب بسط قابل محاسبه خواهند بود.

عملگر	ضریب	سطر	ستون
$(\tilde{\tau}_i^{+})_{ex}$	α_j^i	one-particle	vacuum
$(\tilde{\tau}_i^{+})_{ex} - \tilde{\tau}_i^{+(1)}$	$\alpha^i_{j_1,j_2,j_3}$	j_1, j_2	j_3
$(\tilde{\tau}_i^{+})_{ex} - \tilde{\tau}_i^{+(1)} - \tilde{\tau}_i^{+(2)}$	$\alpha^i_{j_1,j_2,j_3,j_4,j_5}$	j_1, j_2, j_3	$j_4, j_5,$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

با توجه به رابطه بسط $\tilde{\tau}_i^+$:

۱. ضرایب جمله مرتبه اول بسط یعنی α_j^i ها، همان توابع موج تک ذره ای هستند. به عبارتی در جمله مرتبه اول بسط فقط اطلاعات سکتور تک ذره ای وجود دارد.

۲. بسط مرتبه دوم سکتور تک ذره ای را به دو ذره ای ارتباط می دهد و همینطور الی آخر.

• نتایج عددی:

$N = 9,\ t = 2\ ,\ \Delta = 1$ and $W = 30$ ➡ Fully MBL regime

برای جایگاه وسط زنجیره، ضرایب بسط و به دنبال آن هر مرتبه از بسط را محاسبه می کنیم و به منظور دستیابی به درجه همگرایی بسط مذکور نرم اختلاف عملگر خلق فرمیونی دقیق و عملگر تقریبی محاسبه شده در مراتب مختلف بسط به ازای طول های جایگزیدگی گوناگون در جدول اسلاید بعد گزارش شده است.

شایان ذکر است که منظور از طول جایگزیدگی برابر ۳ این است که عملگر خلق به طور مؤثر روی ۳ جایگاه اثر می کند و به همین ترتیب برای سایر طول های جایگزیدگی.

L_{loc}	$\lvert(\hat{\tau}_i^+)_{ex} - \hat{\tau}_i^{+(1)}\rvert$	$\lvert(\hat{\tau}_i^+)_{ex} - \hat{\tau}_i^{+(1)} - \hat{\tau}_i^{+(2)}\rvert$	$\lvert(\hat{\tau}_i^+)_{ex} - \hat{\tau}_i^{+(1)} - \hat{\tau}_i^{+(2)} - \hat{\tau}_i^{+(3)}\rvert$	$\lvert(\hat{\tau}_i^+)_{ex} - \hat{\tau}_i^{+(1)} - \hat{\tau}_i^{+(2)} - \hat{\tau}_i^{+(3)} - \hat{\tau}_i^{+(4)}\rvert$
3	2.25057231659	2.37227048004	0.91116060085	0.38048753828
5	5.00100379956	5.15969085615	1.24179151397	0.83652613235
7	6.50278322166	8.81927297507	5.98562949968	3.04432930030
9	7.21038661055	10.40517637305	10.85128440067	9.30911566426

- بحث و نتیجه گیری:

۱. با توجه به اینکه در مطالعات پیشین هرگز به محاسبه دقیق ضرایب بسط عملگرهای خلق فرمیونی پرداخته نشده لذا ما کوشیدیم تا با بهره گیری از روش قطری سازی دقیق ضرایب این بسط را برای یک سامانه اسپینی بدست آوریم.

۲. توجه به این نکته ضروری است که این بسط برای سامانه ای در فاز ETH همگرایی نخواهد داشت و صرفا برای سامانه ای در فاز MBL می تواند به همگرایی قابل قبولی دست یابد.

۳. با توجه به جدول مذکور میتوان مشاهده کرد که بین نرخ رشد طول جایگزیدگی و مرتبه ای از بسط که برای همگرایی نیاز است همبستگی وجود دارد. به عبارتی با افزایش طول جایگزیدگی تعداد جملاتی از بسط که همگرایی مطلوبی را فراهم کند افزایش می یابد. به نظر می رسد برای دستیابی به همگرایی قابل قبول جملات بسط باید تا همان مرتبه طول جایگزیدگی محاسبه شود.

از حسن توجه شما سپاسگزارم